Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

TD : Séries.

Exercice 1 *Etudier la nature des séries numériques suivantes avec le test de convergence indiqué.*

1. *Condition nécessaire de convergence :*
   (a) $U_n = \frac{n+1}{2n+1}$;
   (b) $V_n = \sqrt{n^2+n} - n$;
   (c) $W_n = Arc\sin(\frac{n^2+1}{n^2})$.
2. *Test de d'Alembert :*
   (a) $U_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$;
   (b) $V_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}$;
   (c) $W_n = \frac{n^3}{n!}$.
3. *Test de Cauchy*
   (a) $U_n = \frac{2^n}{n}$;
   (b) $V_n = (\frac{n+1}{2n+2})^n$;
   (c) $W_n = (Arc\sin(\frac{1}{n}))^n$.
4. *Test de comparaison :*
   (a) $U_n = \frac{n}{n^2+2}$;
   (b) $V_n = \frac{n}{(n^2+1)(n+2)}$;
   (c) $W_n = \frac{1}{n}(\frac{3}{4})^n$.
5. *Test d'équivalence :*
   (a) $U_n = \frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$;
   (b) $V_n = (\sin(\frac{1}{n}))^3$;
   (c) $W_n = \ln(\frac{n^2+1}{n^2})$.

Exercice 2 *Etudier la nature des séries alternées suivantes :*

1. $U_n = (-1)^n e^{-n}$;
2. $V_n = (-1)^n n$;
3. $W_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Exercice 3 *Soit la série de terme général u_n , définie par*
$u_{2n} = \frac{1}{n+1}$, $u_{2n+1} = \ln(\frac{n+1}{n+2})$ $(n \geq 0)$.
Montrer que cette série est alternée et convergente.

Exercice 4 *Soit f continue décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.*

1. *Etudier la série de terme général $(n \geq 0)$*
   $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)dt$
2. *Cas particulier :*
   $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)dt \quad (n \geq 1)$.

Exercice 5 *Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = ln(u_n)$

1. *Montrer, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité*
$$x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$$
.
2. *En déduire que*
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$$
3. *Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.*
4. *Montrer que (u_n) converge, et préciser sa limite.*

Exercice 7 *Soit n un entier naturel, $n \geq 2$,on considère la serie de terme général $U_n = \frac{4}{n^2-1}$.*

1. *Montrer que cette serie est convergente.*
2. *Déterminer les réels a et b tels que :*
   $\frac{4}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$.
3. *En déduire que :* $\sum\limits_{k=2}^{n} U_k = 3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}$.
4. *En déduire la somme* $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} U_k$.

Exercice 8 *Considérons la série de terme général défini par $U_0 = 0$ et $U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ si $n \geq 1$.*

1. *Montrer que cette série est convergente.*

2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

3. *En déduire la somme* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} U_k$.

Exercice 9 *Notons, pour tout entier* $n \geq 1$: $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1}$.

1. *Calculer* $\int\limits_0^1 t^p dt$.

2. *Calculer* $\sum\limits_{p=0}^{n-1} (-t)^p$.

3. *Démontrer que* $S_n = \ln 2 - \int\limits_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.

4. *Démontrer que* $|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$.

5. *En déduire la somme* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 10 *Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$;
2. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$;
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$;
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$;
5. $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$;
6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{a}{2^n}\right)$ $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tanh \frac{a}{2^n}}{2^n}$.

Exercice 11 *Etudier, suivant les valeurs de* α *et* β, *la convergence des séries suivantes :*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta}$$

.

Exercice 12 1. *En utilisant une intégrale, montrer que pour tout* $n > 0$:
$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

2. *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   a) *Etablir que pour tout* $n \geq 1$:
   $ln(n+1) \leq H_n \leq ln(n) + 1$.

   b) *Déterminer un équivalent simple à la suite* (H_n) *ainsi que sa limite.*

3. *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $u_n = H_n - ln(n+1)$.

   a) *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente. On pose* $\gamma = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. *Ce réel est appelé constante d'Euler.*

   b) *Etablir l'identité* $H_n = ln(n) + \gamma + o(1)$.

4. *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   a) *Montrer que les suites extraites* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

   b) *Quelle est la nature de la suite* (S_n) *?*

5. *Dans cette question, on se propose de calculer* $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

   a) *Etablir que pour tout* $n \geq 1$:
   $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

   b) *En exploitant le résultat de la question 3.b, déterminer* ℓ.

6. *En discutant selon la parité de* n , *établir la majoration :* $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}$.

7. *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(\frac{2k\pi}{3})$.

   a) *Déterminer* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que*
   $T_{3n} = a \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} + b \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1} + c \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+2}$.

   b) *En déduire que* $T_{3n} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{1}{k}$.

8. *Déterminer la limite de la suite* (T_n).

Exercice 13 *Soit* p *un entier naturel et* f *une fonction continue, strictement positive, décroissante sur* $[p, +\infty[$ *et telle que* $\int\limits_p^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*
Pour tout entier naturel n *supérieur ou égal à* p, *on pose* $S_n = \sum\limits_{k=p}^{n} f(k)$.

1. (a) *Utiliser la décroissance de* f *pour montrer que, pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal* p, *on a :* $S_n - f(p) \leqslant \int\limits_p^n f(t)dt$.

   (b) *En déduire que la série de terme général* $f(n)$ *est convergente.*

   On pose désormais, pour tout entier naturel n *supérieur ou égal à* p, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2. (a) *Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :*

$$\int_n^{+\infty} f(t)dt - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

(b) *En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)dt$ pour que :*

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

3. *Dans cette question, pour tout réel x de $[2, +\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.*

(a) *Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2b).*

(b) *En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$*

(c) *La série de terme général R_n est-elle convergente ?*